Primeira Lista de Teoria Eletromagnética I

1 - A figura 1 mostra uma esfera de carga Q e uma barra fina de carga q alinhada radialmente em relação à esfera. A barra tem densidade linear de carga constante, comprimento L e sua extremidade mais próxima se encontra à distância d do centro da esfera.

(a) Calcule o vetor força elétrica produzido pela esfera sobre a barra.

(b) Explique como poderíamos obter essa mesma força elétrica usando duas cargas pontuais estáticas de cargas Q e q, respectivamente.

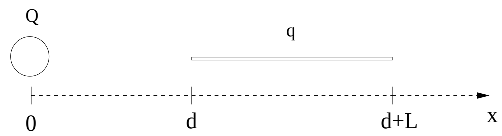

Figura 1: Problema 1

2 - Considere um disco circular plano de raio R e densidade superficial de carga uniforme σ.

(a) Determine o campo elétrico a uma distância z acima do centro do disco.

(b) Mostre que a expressão obtida para o campo elétrico no item (a) se reduz ao campo de uma carga pontual para pontos tais que $z \gg R$.

(c) Use a expressão obtida para o campo elétrico no item (a) para determinar o campo elétrico a uma altura z de um plano infinito.

3 - Considere uma casca esférica de raio R e densidade superficial de carga uniforme σ.

(a) Determine através da *lei de Coulomb* o campo elétrico a uma distância r do centro da casca, abordando os casos $r > R$ (ponto externo à casca) e $r < R$ (ponto interno à casca). Expresse suas respostas em termos da carga total q da esfera.

(b) Use o resultado obtido no item (a) para encontrar os campos interno e externo de uma esfera maciça de raio R e densidade volumétrica de carga constante ρ. Expresse sua resposta em termos da carga total q da esfera.

(c) Desenhe um gráfico de $|\vec{E}|$ como função como função de r para a esfera maciça.

4 - Encontre o campo elétrico dentro de uma esfera com densidade volumétrica de carga ρ proporcional à distância da origem tal que $\rho = kr$, onde k é uma constante.

5 - Dois fios infinitamente longos estão dispostos no plano xy paralelos ao eixo x, conforme a figura 2. Os fios estão simetricamente dispostos em relação à origem e separados por uma distância $2a$.

(a) Determine o campo elétrico em qualquer ponto do plano xy externo aos fios.

(b) Determine o potencial em qualquer ponto do plano xy externo aos fios usando a origem como ponto de referência para o potencial.

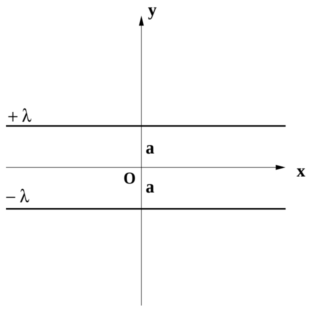

Figura 2: Problema 5

6 - Duas esferas, cada uma com raio R e com distribuições volumétricas de cargas de densidades uniformes $+\rho$ e $-\rho$, respectivamente, estão posicionadas de forma que se sobrepõem parcialmente (figura 3). Chame o vetor do centro positivo ao centro negativo de $\vec{d}$. Mostre que o campo na região de sobreposição é constante e encontre o seu valor.

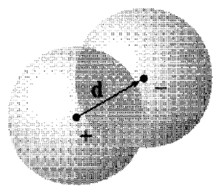

Figura 3: Problema 6

7 - Um cabo coaxial longo (figura 4) possui uma densidade *volumétrica* de carga uniforme ρ no cilindro interno (raio a) e uma densidade *superficial* de carga uniforme na casca externa do cilindro (raio b). Essa carga superficial é negativa e de magnitude exata para que o cabo, como um todo, seja eletricamente neutro. Tomando s como a coordenada cilíndrica radial, resolva as questões abaixo.

(a) Encontre o campo elétrico em cada uma das seguintes três regiões: (i) dentro do cilindro interno ($s < a$), (ii) entre os dois cilindros ($a < s < b$), (iii) externa ao cabo ($s > b$).

(b) Faça um gráfico de $|\vec{E}|$ como função de s.

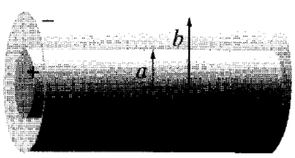

Figura 4: Problema 7

8 - Um tijolo plano, que se estende ao infinito nas direções x e z e de espessura $2d$ ao longo do eixo y, possui densidade volumétrica de carga ρ positiva (figura 5).

(a) Encontre o campo elétrico como função de y, onde $y = 0$ no centro.

(b) Faça um gráfico de E_y versus y.

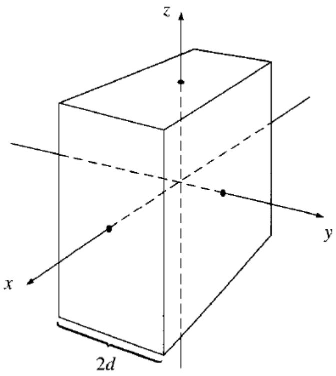

Figura 5: Problema 8

9 - Considere as expressões abaixo para o campo eétrico:

$$\begin{aligned} \vec{E}_1 &= k\left[xy\,\hat{\imath} + 2yz\,\hat{\jmath} + 3xz\,\hat{k}\right], \\ \vec{E}_2 &= k\left[y^2\,\hat{\imath} + \left(2xy + z^2\right)\,\hat{\jmath} + 2yz\,\hat{k}\right], \end{aligned}$$

onde k é uma constante com unidades adequadas.

(a) Uma das expressões ($\vec{E}_1$ ou $\vec{E}_2$) é impossível para um campo *eletrostático*. Qual delas?

(b) Para o campo *possível*, encontre o potencial usando a origem como seu ponto de referência (e escolhendo um caminho explícito para realizar a integração sobre o campo elétrico). Verifique sua resposta calculando $\vec{\nabla} V$, com V denotando o potencial elétrico.

10 - Considere um fio infinitamente longo com densidade linear de carga uniforme λ.

(a) Encontre o potencial a uma distância s do fio.

(b) Calcule o gradiente do potencial e verifique que ele fornece o campo elétrico obtido diretamente via Lei de Gauss.

11 - Considere a condição de contorno para os campos elétricos imediatamente acima $\vec{E}_{acima}$ e abaixo $\vec{E}_{abaixo}$ de uma superfície de carga:

$$\vec{E}_{acima} - \vec{E}_{abaixo} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\hat{n},$$

onde $\hat{n}$ é o versor normal perpendicular à superfície, apontando de "baixo"para "cima".

(a) Verifique que a condição de contorno é satisfeita para uma casca cilíndrica reta infinita uniformemente carregada.

(b) Verifique que a condição de contorno é satisfeita para a superfície externa de um cabo coaxial longo, o qual carrega densidade de carga volumétrica uniforme ρ no cilindro interno (raio r_a) e densidade de carga superficial uniforme σ no cilindro externo (raio r_b), conforme a figura 6. A superfície externa é carregada com carga $-q$ e a superfície interna é carregada com carga $+q$ de modo que o cabo como um todo é eletricamente neutro.

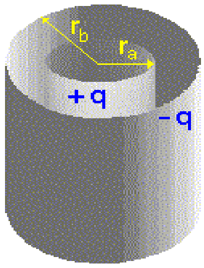

Figura 6: Problema 11 - item (b)

12 - Considere o sistema de 3 cargas pontuais situadas no vértice de um quadrado (de lado a), conforme a figura 7.

(a) Quanto trabalho será necessário para trazer uma carga $+q$ a partir do infinito e colocá-la no quarto vértice?

(b) Quanto trabalho é necessário para agrupar o conjunto inteiro de 4 cargas?

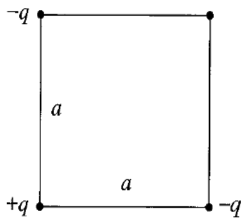

Figura 7: Problema 12

13 - Encontre a energia eletrostática armazenada em uma esfera sólida uniformemente carregada de raio R e carga q. Faça-o de três formas diferentes:

(a) Use que

$$W = \frac{1}{2}\int \rho V d\tau,$$

onde ρ é a densidade volumétrica de carga e V é o potencial eletrostático.

(b) Use que

$$W = \frac{\varepsilon_0}{2}\int E^2 d\tau,$$

onde E é o módulo do campo elétrico e a integral é sobre todo o espaço.

(c) Use que

$$W = \frac{\varepsilon_0}{2}\left(\int_{\mathcal{V}} E^2 d\tau + \oint_{\mathcal{S}} V\vec{E}\cdot d\vec{a}\right),$$

tomando $\mathcal{V}$ como um volume esférico de raio a. Analise o que acontece quando $a \to \infty$.

14 - Uma esfera metálica de raio R, com carga q, está cercada por uma grossa casca metálica concêntrica (raio interno a e raio externo b, conforme figura 8). A casca não possui carga líquida.

(a) Encontre a densidade superficial de carga σ em R, em a e em b.

(b) Encontre o potencial no centro, usando o infinito como ponto de referência.

(c) Agora a superfície externa foi encostada em um fio de aterramento que baixa o seu potencial para zero (o mesmo que no infinito). Como as respostas para os itens (a) e (b) se alteram?

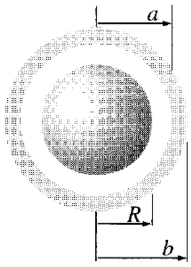

Figura 8: Problema 14

15 - Uma esfera metálica de raio R tem uma carga total Q. Qual é a força de repulsão entre seu hemisfério norte e seu hemisfério sul?

16 - Encontre a capacitância por unidade de comprimento de dois tubos cilíndricos coaxiais metálicos, com raios a e b, conforme figura 9.

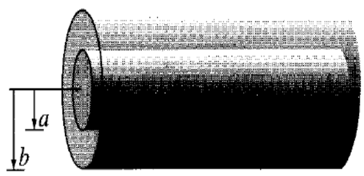

Figura 9: Problema 16

17 - Se o campo elétrico em uma região é dado (em coordenadas esféricas) pela expressão

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{A\hat{r} + B\text{sen}\theta\cos\phi\,\hat{\phi}}{r},$$

onde A e B são constantes, qual é a densidade de carga?

18 - Uma esfera de raio R tem uma densidade volumétrica de carga dada por $\rho(r) = k\,r$, onde k é uma constante. Encontre a energia eletrostática da configuração.

19 - O potencial elétrico de uma determinada configuração é dado pela expressão

$$V(\vec{r}) = A\frac{e^{-\lambda r}}{r},$$

onde A e λ são constantes. Determine:

(a) o campo elétrico $\vec{E}(\vec{r})$.

(b) a densidade de carga $\rho(r)$.

(c) a carga total Q.

20 - Demonstre as seguintes regras de produtos para operações vetoriais (onde f é uma função escalar e $\overrightarrow{A}$ e $\overrightarrow{B}$ são funções vetoriais):

(a) $\overrightarrow{\nabla} \cdot \left(f\,\overrightarrow{A}\right) = f\,\left(\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{A}\right) + \overrightarrow{A} \cdot \left(\overrightarrow{\nabla}\,f\right)$.

(b) $\overrightarrow{\nabla} \times \left(f\,\overrightarrow{A}\right) = f\,\left(\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{A}\right) - \overrightarrow{A} \times \left(\overrightarrow{\nabla}\,f\right)$.

(c) $\overrightarrow{\nabla} \cdot \left(\overrightarrow{A} \times \overrightarrow{B}\right) = \overrightarrow{B} \cdot (\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{A}) - \overrightarrow{A} \cdot (\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{B})$

(d) $\vec{\nabla} \times \left(\vec{A} \times \vec{B}\right) = \left(\vec{B} \cdot \vec{\nabla}\right)\vec{A} - \left(\vec{A} \cdot \vec{\nabla}\right)\vec{B} + \vec{A}\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{B}\right) - \vec{B}\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}\right)$.

21 - Considere um vetor $\vec{v} = (2xz + 3y^2)\hat{y} + (4yz^2)\hat{z}$, onde x, y e z denotam coordenadas retangulares.

(a) Determine $\oint_C \vec{v} \cdot d\vec{l}$, onde C é caminho fechado indicado no plano zy da figura 10.

(b) Verifique a validade do teorema de Stokes para a superfície quadrada S da figura 10.

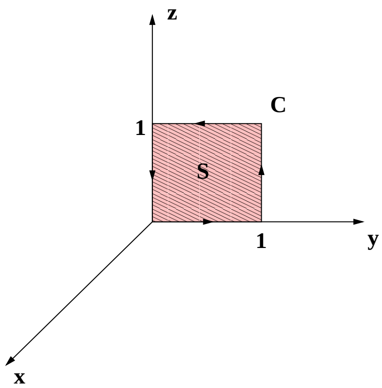

Figura 10: Problema 21

22 - Mostre os seguintes corolários dos teoremas de Gauss e Stokes:

(a) $\int_{\mathcal{V}}(\vec{\nabla}T)d\tau = \oint_{\mathcal{S}} T d\vec{a}$. [Dica: a partir do teorema de Gauss, use que $\vec{v} = \vec{c}T$, onde $\vec{c}$ é uma constante, e então aplique as regras de produtos].

(b) $\int_{\mathcal{V}}(\vec{\nabla} \times \vec{v})d\tau = -\oint_{\mathcal{S}} \vec{v} \times d\vec{a}$. [Dica: a partir do teorema de Gauss, substitua $\vec{v}$ por $\vec{v} \times \vec{c}$, onde $\vec{c}$ é uma constante].

(c) $\int_{\mathcal{S}}(\vec{\nabla}T) \times d\vec{a} = -\oint_{\mathcal{P}} T d\vec{l}$. [Dica: a partir do teorema de Stokes, use que $\vec{v} = \vec{c}T$, onde $\vec{c}$ é uma constante].